

УДК 519.634

## **О дискретизации одномерной квазигидродинамической системы уравнений для реального газа**

А. А. Злотник\*, В. А. Гаврилин

Изучено семейство трехточечных симметричных дискретизаций по пространству квазигидродинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния газа. Выведено уравнение баланса энтропии, в котором вид сеточных дисбалансных слагаемых зависит от выбора усреднений плотности и внутренней энергии, а для специальных усреднений не дивергентные дисбалансные слагаемые равны нулю. Выполнены расчеты известных тестов для системы уравнений Эйлера при различных уравнениях состояния.

Ключевые слова: газовая динамика, дискретизация по пространству, уравнения Эйлера, общие уравнения состояния, уравнение баланса энтропии, квазигидродинамическая система уравнений.

---

### **Введение**

---

Квазигазодинамические (КГД) и квазигидродинамические (КГДД) системы уравнений служат основой для построения класса разностных методов решения задач газо- и гидродинамики. Их построение, свойства, дискретизация и приложения подробно представлены в [1 — 3] (система КГДД была предложена Ю. В. Шеретовым). В частности, физическая корректность данных систем подтверждена выполнением уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Математическая корректность этих систем, как параболических по Петровскому, описана в [4 — 7].

Большой интерес представляют вывод уравнения баланса и анализ неотрицательности производства эн-

тропии для дискретизаций указанных систем. В рамках пространственной дискретизации одномерной КГД системы это было проведено для совершенного политропного [8] и реального [9] газов, где в том числе описаны новые нестандартные элементы дискретизации, обеспечивающие неотрицательность производства энтропии.

Математически КГДД систему бывает удобно рассматривать как специальное упрощение соответствующей КГД системы, поскольку это позволяет переносить ряд результатов со второй системы на первую. В данной работе подобный подход используется для результатов из [9]. Изучено семейство трехточечных симметричных дискретизаций по пространству КГДД системы в форме уравнений баланса массы, импульса и полной энергии. Данное семейство таково, что дополнительно уравнение внутренней энергии не содержит дисбалансных слагаемых. Выводится уравнение баланса энтропии, в котором вид сеточных дисбалансных слагаемых зависит от выбора усреднений плотности и внутренней

---

\* azlotnik2007@mail.ru

энергии. Приведены такие специальные усреднения, для которых недивергентные дисбалансные слагаемые исчезают.

Были выполнены численные эксперименты по расчету набора известных тестов для системы уравнений Эйлера для совершенного политропного (СП) газа, двучленных уравнений состояния и уравнений состояния Ван-дер-Ваальса (без фазовых переходов в течениях). Полученные результаты лишь немного уступают недавно установленным с применением более сложной КГД системы [9], что свидетельствует о конкурентоспособности подхода, хотя при экстремальных параметрах течений использование КГД системы все же предпочтительнее. Также улучшены результаты для стандартной дискретизации КГД системы в случае СП газа в [10] (где расчет не всех тестов был успешным).

## 1. Одномерная квазигидродинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния

Пространственно-одномерная КГД система [2, 3] состоит из следующих уравнений баланса массы, импульса и полной энергии (в отсутствие массовых сил):

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0; \quad (1.1)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(ju + p) = \partial_x \Pi; \quad (1.2)$$

$$\partial_t E + \partial_x \{(u-w)(E+p)\} = -\partial_x q + \partial_x(\Pi u) + Q. \quad (1.3)$$

Здесь  $\partial_t, \partial_x$  — частные производные по аргументам  $t \geq 0$  и  $x \in [0, X]$ ; функции  $\rho > 0, u, E = 0,5\rho u^2 + p\varepsilon$  — плотность, скорость и полная энергия газа;  $p, \varepsilon$  — давление и внутренняя энергия. Поток массы  $j$ , вязкое напряжение  $\Pi$  и тепловой поток  $q$  задаются формулами:

$$j = \rho(u-w), \quad w = \frac{\tau}{\rho}(\rho u \partial_x u + \partial_x p), \quad (1.4)$$

$$\Pi = \frac{4}{3}\mu \partial_x u + \rho u w, \quad -q = \kappa \partial_x \theta, \quad (1.5)$$

где  $\theta > 0$  — абсолютная температура;  $\mu > 0, \kappa > 0, \tau > 0$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности, а также релаксационный параметр, которые могут быть произвольными функциями  $(\rho, u, \theta)$ ;  $Q \geq 0$  — мощность тепловых источников.

Выражения для  $w, \Pi$  и  $-q$  заметно проще, чем для КГД системы (в целом имеющую ту же структуру).

Из (1.1) — (1.3) выведем уравнение баланса внутренней энергии:

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \partial_x(j\varepsilon) = -\partial_x q + \Pi \partial_x u - p \partial_x(u-w) + w \partial_x p + Q. \quad (1.6)$$

Возьмем общие уравнения состояния газа в форме  $p = p(\rho, \theta), \varepsilon = \varepsilon(\rho, \theta)$ , связанные равенством Максвелла  $p = \theta p_\rho + \rho^2 \varepsilon_\rho$  в  $D_0$  и удовлетворяющие условиям термодинамической устойчивости вида:

$$p_\rho \geq 0, \varepsilon_\theta > 0 \text{ в } D_0,$$

где, например,  $p_\rho, p_\theta$  — частные производные функции  $p = p(\rho, \theta)$ ;  $D_0$  — допустимая область значений  $(\rho, \theta)$ .

Введем энтропию  $s = S(\rho, \varepsilon)$  с помощью формул Гиббса  $S_\rho = -p/(\rho^2, \theta), S_\varepsilon = 1/\theta$ . Напомним, что  $C_s^2 = p_\rho + (\theta p_\theta^2)/(\rho^2 \varepsilon_\theta)$  — квадрат скорости звука.

Для случая совершенного политропного (СП) газа имеем:

$$p = (\gamma-1)\rho\varepsilon = R\rho\theta, \quad \varepsilon = c_V\theta, \quad S = S_0 - R \ln \rho + c_V \ln \varepsilon$$

и  $C_s^2 = \gamma(\gamma-1)\varepsilon$  с постоянными  $\gamma > 1, c_V > 0$  и  $R = (\gamma-1)c_V$ .

Из уравнений баланса массы (1.1) и внутренней энергии (1.6) вытекает уравнение баланса энтропии:

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(j s) = \partial_x \left( -\frac{q}{\theta} \right) + \frac{(\partial_x \theta)^2}{\theta^2} + \frac{4}{3} \frac{\mu(\partial_x u)^2}{\theta} + \frac{\rho w^2}{\tau \theta} + \frac{Q}{\theta}. \quad (1.7)$$

Сумма всех слагаемых правой части, кроме дивергентного первого  $\partial_x(-q/\theta)$ , представляет собой производство энтропии. Оно неотрицательно, что играет принципиальную физическую роль.

## 2. Пространственная дискретизация и дискретное уравнение баланса энтропии

Введем на  $[0, X]$  основную неравномерную  $\bar{\omega}_h$  с узлами  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = X$  и шагами  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , а также вспомогательную сетку  $\omega_h^*$  с узлами  $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2, 0 \leq i \leq N-1$  и шагами  $\hat{h}_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = (h_i + h_{i+1})/2$ .

Пусть  $H(\omega)$  — пространство функций, заданных на сетке  $\omega$ . Для  $v \in H(\bar{\omega}_h)$  и  $y \in H(\omega_h^*)$  введем усреднения и разностные отношения:

$$[v]_{i+1/2} = 0,5(v_i + v_{i+1}); \quad \delta v_{i+1/2} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}};$$

$$[y]_i^* = \frac{h_i y_{i-1/2} + h_{i+1} y_{i+1/2}}{2\hat{h}_i}; \quad \delta^* y_i = \frac{y_{i+1/2} - y_{i-1/2}}{\hat{h}_i}$$

и положим  $(v)_{i+1/2} = v_i, (v)_{i+1/2} = v_{i+1/2}$ . Отметим, что  $[\cdot], \delta: H(\bar{\omega}_h) \rightarrow H(\omega_h^*),$  а  $[\cdot]^*, \delta^*: H(\omega_h^*) \rightarrow H(\omega_h),$  где  $\omega_h = \{x_i; 1 \leq i \leq N-1\}$ .

С учетом [8, 9] построим следующую симметричную по пространству дискретизацию уравнений баланса массы, импульса и полной энергии (1.1) — (1.3):

$$\partial_t \rho + \delta^* j = 0; \quad (2.1)$$

$$\partial_t(\rho u) + \delta^*(j[u] + [p]) = \delta^* \Pi; \quad (2.2)$$

$$\partial_t E + \delta^* \{([u]-w)([E]_2 + [p]) - 0,25h_+^2 \delta u \cdot \delta p\} = \delta^* (-q + \Pi[u] + [Q]), \quad (2.3)$$

на  $\omega_h$ , где давление, полная и внутренняя энергии имеют стандартный вид:

$$E = 0,5\rho u^2 + p\varepsilon; \quad p = p(\rho, \theta); \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, \theta). \quad (2.4)$$

Для сокращения количества скобок положим, что, например,  $\delta u \cdot \delta p = (\delta u)\delta p$  (знак  $[\cdot]$  прекращает действие предыдущих операторов слева).

Используем следующие дискретизации величин (1.4), (1.5):

$$j = [\rho]_0([u] - w); \quad w = \frac{\tau}{[\rho]}([\rho][u]\delta u + \delta p); \quad (2.5)$$

$$\Pi = \frac{4}{3}\mu\delta u + [\rho][u]\dot{w}; \quad -q = \kappa\delta\theta. \quad (2.6)$$

Формулы для  $w$ ,  $\Pi$ ,  $-q$  существенно проще, чем в [9].

Основные неизвестные функции  $\rho$ ,  $u$ ,  $E$  и функции  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\theta$  определены на основной сетке  $\bar{\omega}_h$ , причем  $\rho > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , а функции  $j$ ,  $w$ ,  $\Pi$ ,  $q$ ,  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $Q$  — на вспомогательной сетке  $\omega_h^*$ .

В этих уравнениях наряду с простейшими усреднениями  $[\rho]$ ,  $[u]$ ,  $[p]$  на  $\omega_h^*$  применяется нестандартное усреднение  $[E]_2 = 0,5[\rho]_0 u_- u_+ + [\rho]_0 [\varepsilon]_3$ , а  $[\rho]_0$ ,  $[\varepsilon]_3$  — оставлены произвольными. Виды  $[E]_2$  и добавка  $-0,25h_+^2\delta u \cdot \delta p$  из уравнения (2.3) следуют [8] и гарантируют выполнение уравнения баланса внутренней энергии без сеточных дисбалансов (см. ниже (2.7)). От выбора  $[\rho]_0$ ,  $[\varepsilon]_3$  зависит вид дивергентных и недивергентных сеточных дисбалансных слагаемых в дискретном уравнении баланса энтропии. Будет указан их нетривиальный выбор, гарантирующий отсутствие в нем недивергентных дисбалансных слагаемых и неотрицательность производства энтропии.

Для термодинамических функций  $\psi = \psi(\rho, \theta)$  введем разделенные разности и усреднения по аргументам:

$$d_\rho \psi = \begin{cases} \frac{\psi(\rho_+, \theta) - \psi(\rho_-, \theta)}{\rho_+ - \rho_-} & \text{при } \rho_- \neq \rho_+; \\ \psi_\rho(\rho_-, \theta) & \text{при } \rho_- = \rho_+; \end{cases}$$

$$d_\theta \psi = \begin{cases} \frac{\psi(\rho, \theta_+) - \psi(\rho, \theta_-)}{\theta_+ - \theta_-} & \text{при } \theta_- \neq \theta_+; \\ \psi_\theta(\rho, \theta_-) & \text{при } \theta_- = \theta_+; \end{cases}$$

$$a_\rho \psi = 0,5 \{ \psi(\rho_-, \theta) + \psi(\rho_+, \theta) \};$$

$$a_\theta \psi = 0,5 \{ \psi(\rho, \theta_-) + \psi(\rho, \theta_+) \}.$$

Как и в [8], верны уравнения баланса кинетической и внутренней энергий:

$$0,5\partial_t(\rho u^2) + 0,5\delta^*(j u_- u_+) + \delta^*[p] \cdot u = \delta^*\Pi - u;$$

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \delta^*(j[\varepsilon]_3) = -\delta^*q + [\Pi\delta u]^* - p\delta^*([u] - w) + [w\delta p]^* + [Q]^*. \quad (2.7)$$

Последнее служит аналогом дифференциального уравнения (1.6).

Вывод уравнения баланса энтропии базируется на следующей формуле [9]:

$$\partial_t(\rho s) + \delta^*(j[s]) = \frac{1}{\theta} \{ \partial_t(\rho\varepsilon) + \delta^*(j[\varepsilon]_3) + p\delta^*([u] - w) \} + D_h$$

с сеточным дисбалансом

$$D_h = \delta^* B_{1h} + \left[ ([u] - w)(D_{hp}\delta\rho + D_{h\theta}\delta\theta) \right]^*,$$

в котором

$$B_{1h} = ([u] - w) \left( [\rho]_0 \left[ \frac{p}{\rho\theta} \right] - \left[ \frac{p}{\theta} \right] \right) + j \left( \left[ \frac{\varepsilon}{\theta} \right] - [\varepsilon]_3 \left[ \frac{1}{\theta} \right] \right); \quad (2.8)$$

$$D_{hp} = \left( 1 - [\rho]_0 \left[ \frac{1}{\rho} \right] \right) a_\rho \left( \frac{1}{\theta} d_\rho p \right) + [\rho]_0 \left\{ \frac{1}{\rho_- \rho_+} \left[ \frac{p}{\theta} \right] + a_\theta d_\rho \left( s - \frac{\varepsilon}{\theta} \right) \right\}; \quad (2.9)$$

$$D_{h\theta} = \left( 1 - [\rho]_0 \left[ \frac{1}{\rho} \right] \right) a_\rho d_\theta \frac{p}{\theta} + [\rho]_0 \left\{ a_\rho d_\theta \left( s - \frac{\varepsilon}{\theta} \right) - \frac{[\varepsilon]_3}{\theta_- \theta_+} \right\}. \quad (2.10)$$

Множители  $D_{hp}$ ,  $D_{h\theta}$  обращаются в 0 при выборе:

$$\frac{1}{[\rho]_0} := \left[ \frac{1}{\rho} \right] - \frac{\frac{1}{\rho_- \rho_+} \left[ \frac{p}{\theta} \right] + a_\theta d_\rho \left( s - \frac{\varepsilon}{\theta} \right)}{a_\theta \left( \frac{1}{\theta} d_\rho p \right)}; \quad (2.11)$$

$$[\varepsilon]_3 := \theta_- \theta_+ \left\{ a_\rho d_\theta \left( s - \frac{\varepsilon}{\theta} \right) + \left( \frac{1}{[\rho]_0} - \left[ \frac{1}{\rho} \right] \right) a_\rho d_\theta \frac{p}{\theta} \right\}. \quad (2.12)$$

Отметим, что, согласно лемме 1 из [9] при  $p_\rho > 0$  и  $\frac{1}{3} \leq \rho_+ / \rho_- \leq 3$ , правая часть формулы (2.11) положительна.

Для СП газа данные аппроксимации резко упрощаются и принимают вид [8]:

$$[\rho]_0 = \frac{1}{\ln(\rho_-; \rho_+)}, \quad [\varepsilon]_3 = \varepsilon_- \varepsilon_+ \ln(\varepsilon_-; \varepsilon_+), \quad (2.13)$$

где  $\ln(\alpha; \beta)$  — разделенная разность для логарифмической функции

$$\ln(\alpha; \beta) = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} \quad \alpha \neq \beta;$$

$$\ln(\alpha; \alpha) = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Из уравнения баланса внутренней энергии (2.7) вытекает формула [9]:

$$\frac{1}{\theta} \{ \partial_t(\rho\varepsilon) + \delta^*(j[\varepsilon]_3) + p\delta^*([u] - w) \} = \left[ q\delta \frac{1}{\theta} + (\Pi\delta u + w\delta p + Q) \left[ \frac{1}{\theta} \right] \right]^* - \delta^* \left( q \left[ \frac{1}{\theta} \right] + B_{2h} \right)$$

с сеточным дисбалансом

$$B_{2h} := 0.25h_+^2 (\Pi \delta u + w \delta p + Q) \delta \frac{1}{\theta}. \quad (2.14)$$

Определения  $w$ ,  $\Pi$  и  $-q$  (см. (2.5), (2.6)) помогают вывести формулу:

$$\begin{aligned} q \delta \frac{1}{\theta} + (\Pi \delta u + w \delta p + Q) \left[ \frac{1}{\theta} \right] &= \\ &= \frac{\kappa(\delta\theta)^2}{\theta_{-\theta_+}} + \left( \frac{4}{3} \mu (\delta u)^2 + \frac{[\rho]}{\tau} w^2 + Q \right) \left[ \frac{1}{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлив результат об аналоге уравнения (1.8).

**Теорема 1.** Для пространственной дискретизации (2.1) — (2.6) КГДД системы уравнений верно следующее уравнение баланса энтропии:

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho s) + \delta^* (j[s]) &= \delta^* \left( -q \left[ \frac{1}{\theta} \right] + B_{1h} - B_{2h} \right) + \\ &+ \left[ ([u] - w)(D_{hp} \delta p + D_{h\theta} \delta \theta) \right]^* + \Phi, \\ \Phi &:= \left[ \frac{\kappa(\delta\theta)^2}{\theta_{-\theta_+}} + \left( \frac{4}{3} \mu (\delta u)^2 + \frac{[\rho]}{\tau} w^2 + Q \right) \left[ \frac{1}{\theta} \right] \right]^* \geq 0. \end{aligned}$$

Оно содержит дивергентное  $\delta^*(B_{1h} - B_{2h})$  и недивергентное  $\left[ ([u] - w)(D_{hp} \delta p + D_{h\theta} \delta \theta) \right]^*$  дисбалансные слагаемые, определяемые формулами (2.8), (2.14) и (2.9), (2.10). Второе из них обращается в 0 для дискретизаций  $[\rho]_0$ ,  $[\varepsilon]_3$  вида (2.11), (2.12).

Вообще, говоря, дискретизации (2.11), (2.12) достаточно громоздки. На практике можно использовать те или иные их упрощения, что уменьшит дисбалансы по сравнению со случаем простейших дискретизаций.

### 3. Численные эксперименты

Численные эксперименты связаны с решением системы уравнений Эйлера невязкого нетеплопроводного газа, в которой, в отличие от КГДД системы (1.1) — (1.5), нет диссипативных слагаемых с коэффициентами  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ . Данные слагаемые вводятся как искусственные регуляризаторы с использованием (как и в [9]) формул типа [3]:

$$\mu = \alpha_S \tau \rho p; \quad \kappa = \frac{\alpha_S}{\alpha_P} \tau \rho c_V C_s^2,$$

где постоянные  $\alpha_S > 0$ ,  $\alpha_P > 0$  — числа Шмидта и Прандтля.

Дискретизации  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$  по пространству построим в виде [9]:

$$\tau = \alpha \frac{h}{\sqrt{[C_s^2]_4}}; \quad \mu = \alpha_S \tau [\rho] [p_p]; \quad \kappa = \frac{\alpha_S}{\alpha_P} \tau [\rho] [c_V] [C_s^2]_4$$

(используется равномерная сетка по  $x$  с шагом  $h$ ), где

$$[C_s^2]_4 := a_0 d_p p + \frac{[\theta] (a_p d_\theta p)^2}{[\rho]^2 a_p d_\theta \varepsilon} \geq 0.$$

Для дискретизации по времени применим просто явный метод Эйлера (за указанными ниже исключениями) с переменным шагом, выбираемым в соответствии с условием устойчивости типа Куранта по формуле:

$$\Delta t = \beta \min \frac{h}{\omega_h^* | [u] | + \sqrt{[C_s^2]_4}}.$$

Здесь  $0 < \alpha < 1$  и  $0 < \beta \leq 1$  — числовые параметры, наилучшие значения которых подбирают отдельно в каждом расчете.

Рассмотрим задачу Римана о распаде разрывов и возьмем кусочно-постоянные начальные данные:

$$(\rho_0, u_0, p_0)(x) = \begin{cases} (\rho_L, u_L, p_R), & x \leq \frac{X}{2}; \\ (\rho_R, u_R, p_R), & x > \frac{X}{2}; \end{cases}$$

Значения  $\theta_0(x)$  находят из уравнений состояния. Расчеты выполняют до моментов времени  $t_{fin}$ ;  $X = 1$  — в тестах 1, 2;  $X = 10$  — в тесте 3.

Во всех тестах взять простейшие значения  $c_V = 1$  и  $\alpha_S = \alpha_P = 1$ , кроме тестов 1, в, г и 3, б. Графики построены для двух существенно различных значений  $N$  и демонстрируют уточнение результатов при сгущении сетки; на них по оси абсцисс отложены номера узлов для меньшего  $N$ .

**Тест 1** посвящен случаю СП газа и взят из [11 — 13]; использованы «энтропийные» дискретизации  $[\rho]_0$ ,  $[\varepsilon]_3$  вида (2.13).

Заданы начальные данные:

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; 0,75; 1); \quad (\rho_R, u_R, p_R) = (0,125; 0; 0,1); \\ t_{fin} = 0,2; \quad N = 100, 1200; \quad \alpha = 0,5; \quad \beta = 0,7 \text{ — в случае (а);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; -2; 0,4); \quad (\rho_R, u_R, p_R) = (1; 2; 0,4); \\ t_{fin} = 0,15; \quad N = 125, 500; \quad \alpha = 0,018; \quad \beta = 0,09 \text{ — в случае (б);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; 1; 10^{-6}); \quad (\rho_R, u_R, p_R) = (1; -1; 10^{-6}); \\ t_{fin} = 1; \quad N = 50, 200; \quad \alpha = 0,1; \quad \beta = 0,001; \quad \alpha_{Sc} = 30; \\ \alpha_{Pr} = 0,2 \text{ — в случае (в);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; -19,59745; 1000); \\ (\rho_R, u_R, p_R) = (1; -19,59745; 0,01); \quad t_{fin} = 0,012; \\ N = 600, 2400; \quad \alpha = 0,7; \quad \beta = 0,012; \quad \alpha_{Sc} = 3 \text{ — в случае (г).}$$

В случае (в)  $\gamma = 5/3$ , а в остальных —  $\gamma = 1,4$ .

Следует обратить внимание на то, что значения  $\alpha$  в случаях (а), (в) отличаются от  $\alpha = 0,3; 0,4$  в [9], а значения  $\alpha_{Sc}$  в (в), (г) — нестандартны. Для прежних  $\alpha$  результаты хуже, а для  $\alpha_{Sc} = 1$  в варианте (в) удовлетворительных результатов нет.

Функции  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  в моменты времени  $t_{fin}$  в случаях (а) — (з) представлены на рис. 1 — 4. В тесте 1, а (вариант задачи Сода) одновременно присутствуют волна разрежения, контактный разрыв и ударная волна. Полученные результаты аналогичны приведенным в [13, 9].

В тесте 1, б возникают две волны разрежения, движущиеся от центра области к ее концам. В центре  $\rho$  и  $p$  становятся весьма малыми, но  $\varepsilon$  не стремится к 0, и в расчетах там, как правило, возникает заметный энтропийный след. В нашем случае энтропийный след мал даже при небольшом  $N$ . Как и в [9], опускание добавка  $-0,25h_+^2\delta u \cdot \delta p$  в уравнении (2.3) ведет к увеличению энтропийного следа в несколько раз.

Точность результатов при меньшем из двух значений  $N$  в случаях (а), (б) лишь немного ниже, чем в [9], и существенно выше, чем для стандартной дискретизации в [10].

В тесте 1, в (задача Ноха) происходит столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа и образование двух расходящихся ударных волн. Между ними остается неподвижный газ с постоянными параметрами. В данном тесте обычно используются мелкие шаги  $\Delta t$ . В нашем случае также пришлось взять  $\beta = 0,001$  как в [13], что хуже, чем в [9] (возможно также  $\beta = 0,002$  при  $\alpha_{sc} = 60$ ). Это, как и взятие большого  $\alpha_{sc}$ , согласуется с тем, что свойства равномерной параболности КГДД системы ухудшаются [5] с ростом  $M^2/\alpha_{sc}$ , где  $M$  — число Маха, достигающее особенно больших значений в случае (в) [13].

Для теста 1, з характерен значительный перепад давления  $p_L/p_R = 10^5$  и для получения качественных результатов было взято довольно большое  $N$ .

Именно в тесте 1, в, з вместо явного метода был взят модифицированный метод Эйлера, точнее, — метод Эйлера–Коши или Хойна, как и в [9]. Он показал заметно лучшие свойства устойчивости. Отметим, что в [10] в этих вариантах теста успешные результаты получены не были.

**Тест 2** взят из [14] и относится к так называемым двучленным уравнениям состояния газа, которые можно задать формулами:

$$p(\rho, \theta) = R\rho\theta - \frac{\rho_*c_*^2}{\gamma}; \quad \varepsilon(\rho, \theta) = c_V\theta + c_*^2\left(\frac{\rho_*}{\gamma\rho} - \frac{1}{\gamma-1}\right),$$

где  $R = (\gamma - 1)c_V$ ,  $\gamma > 1$ ,  $c_* > 0$ ,  $\rho_* > 0$ ,  $c_V > 0$  — параметры.

«Энтропийные» дискретизации (2.11), (2.12) в данном случае принимают вид [9]:

$$[\rho]_0 = \frac{1}{\ln(\rho_-; \rho_+)}; \quad [\varepsilon]_3 = c_V\theta_- \theta_+ \ln(\theta_-; \theta_+) + c_*^2\left(\frac{\rho_*}{\gamma[\rho]_0} - \frac{1}{\gamma-1}\right).$$

Придерживаясь [14], возьмем  $c_* = \rho_* = 1$ ,  $\gamma = 1,4$  и три случая начальных данных, приводящих к различным конфигурациям течений газа:

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; 0; 8); (\rho_R, u_R, p_R) = (0,125; 0; 0,1); t_{fin} = 0,075; N = 80, 400; \alpha = 0,5; \beta = 0,7 \text{ — в случае (а);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (0,8; 0; 10); (\rho_R, u_R, p_R) = (1; 0; 0,1); t_{fin} = 0,1; N = 400, 2000; \alpha = 0,25; \beta = 0,2 \text{ — в случае (б);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1; -2; 8); (\rho_R, u_R, p_R) = (1; 2; 8); t_{fin} = 0,07; N = 50, 300; \alpha = 0,3; \beta = 0,9 \text{ — в случае (в).}$$

Тест 2, а, в родственен тесту 1, а, б.

Отметим, что значения  $\alpha$  в случаях (а) — (в) отличаются от  $\alpha = 0,3; 0,5; 0,2$  из [9]. Для прежних  $\alpha$  результаты ухудшаются, и, в отличие от [9], взятия  $\kappa = 0$  в случае (а), либо прежнего  $\beta$ , или  $c_V = 10$  в случае (б) не приводит к успеху.

Решения в варианте (а) опущены, а в более сложных: (б), (в) — показаны на рис. 5, 6. При меньшем из двух значений  $N$  они незначительно отличаются от полученных по методу из [9]: в случае (в) при  $N = 300$  энтропийный след на графике  $\varepsilon$  заметно меньше, чем в [14].

**Тест 3** связан с классическими уравнениями состояния Ван-дер-Ваальса:

$$p(\rho, \theta) = \frac{R\rho\theta}{1-b\rho} - a\rho^2; \quad \varepsilon = c_V\theta - a\rho,$$

где  $a, b, R, c_V$  — положительные физические постоянные;  $0 < \rho < b^{-1}$ . В нем течения удовлетворяют условию  $p_\rho(\rho, \theta) > 0$  (фазовых переходов нет).

«Энтропийные» дискретизации (2.11), (2.12) в данном случае таковы [9]:

$$\frac{1}{[\rho]_0} = (\eta_- - b)(\eta_+ - b) \ln(\eta_- - b; \eta_+ - b) + b;$$

$$[\varepsilon]_3 = c_V\theta_- \theta_+ \ln(\theta_-; \theta_+) - a[\rho] + a\left(\frac{1}{[\rho]_0} - \left[\frac{1}{\rho}\right]\right)[\rho^2],$$

при этом первая из формул взята при  $a = 0$  во избежание чрезмерной громоздкости ( $\eta = 1/\rho$  — удельный объем).

Фиксируются параметры  $a = 1684,54; b = 0,001692; R = 461,5; c_V = 1401,88$ , два набора начальных данных и  $t_{fin}$  (см. тесты 5, 6 в [15, 9]):

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (250; 0; 35966778); (\rho_R, u_R, p_R) = (166,6; 0; 27114795); t_{fin} = 0,005; N = 40, 400; \alpha = 0,2; \beta = 0,5 \text{ — в случае (а);}$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (333; 0; 37311358); (\rho_R, u_R, p_R) = (111; 0; 21770768); t_{fin} = 0,0025; N = 60, 600; \alpha = 0,3; \beta = 0,5; \alpha_{pr} = 6 \text{ — в случае (б);}$$

В отличие от тестов 1, 2 здесь и параметры те же, что и в [9] (в случае (а) в [9]  $\mu \neq 0$ ), и результаты практически идентичны. Чтобы стали заметны небольшие

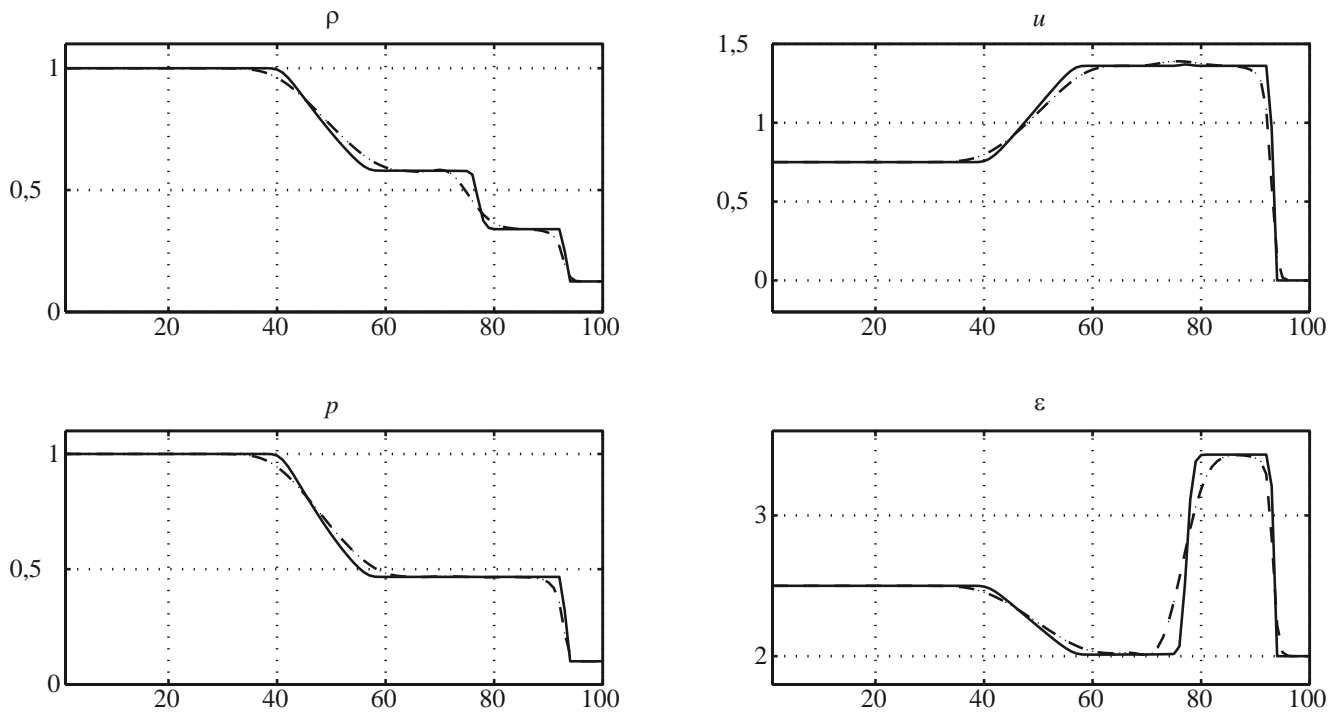


Рис. 1. Тест 1, а — задача Сода. Решение при  $N = 100$  (пунктир) и  $N = 200$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 0,2$

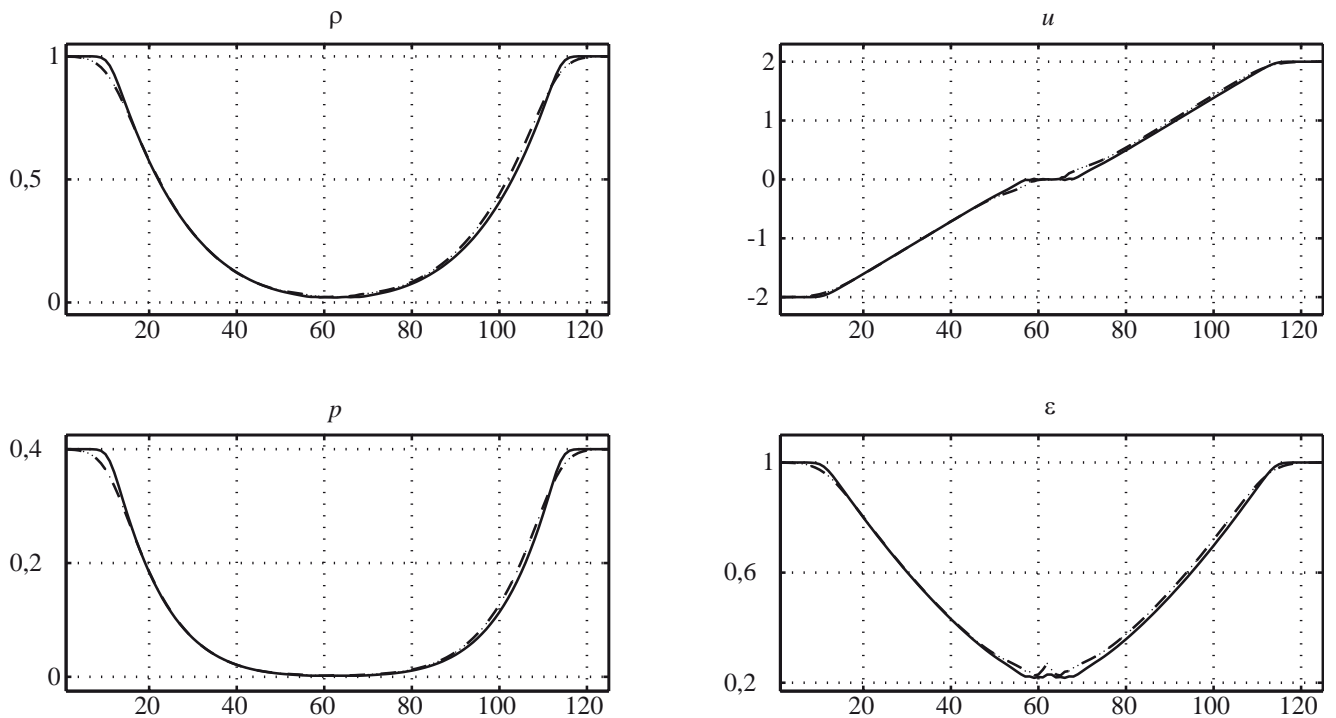


Рис. 2. Тест 1, б — задача с двумя волнами разрежения. Решение при  $N = 125$  (пунктир) и  $N = 500$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 0,15$

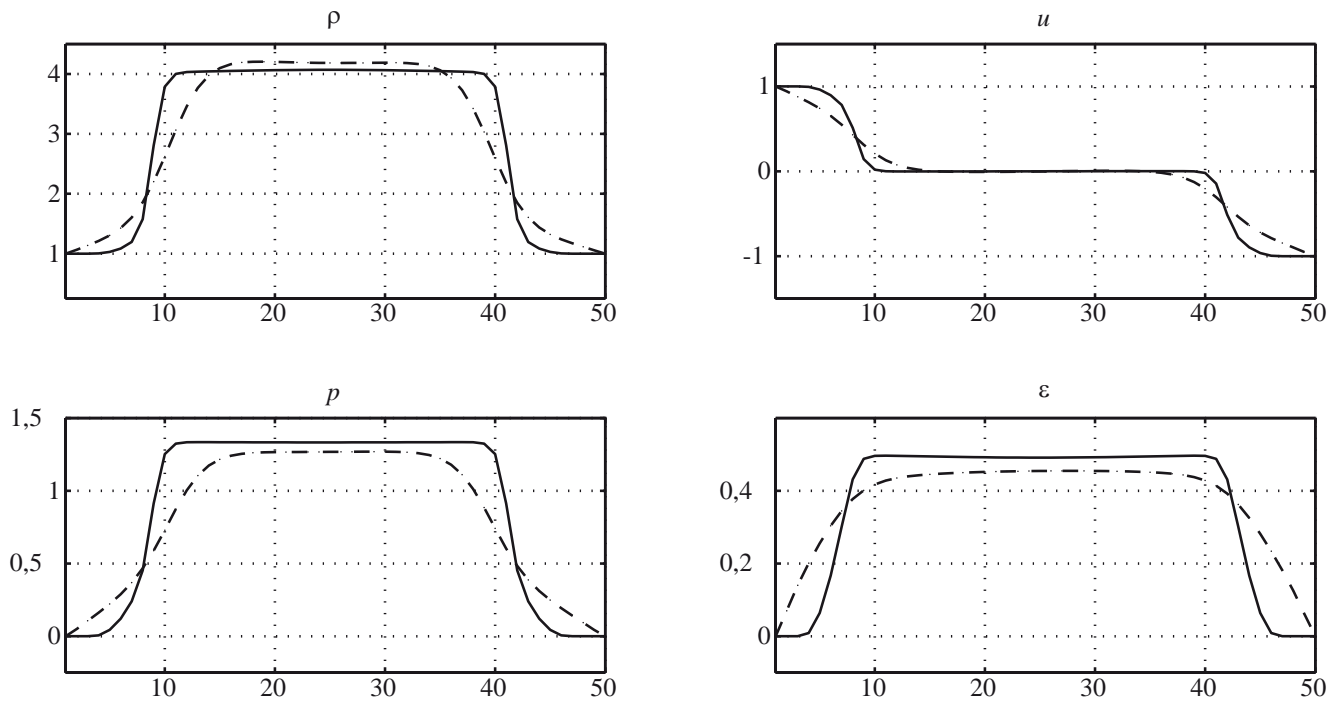


Рис. 3. Тест 1,  $\varepsilon$  — задача Ноха. Решение при  $N = 50$  (пунктир) и  $N = 200$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 1$

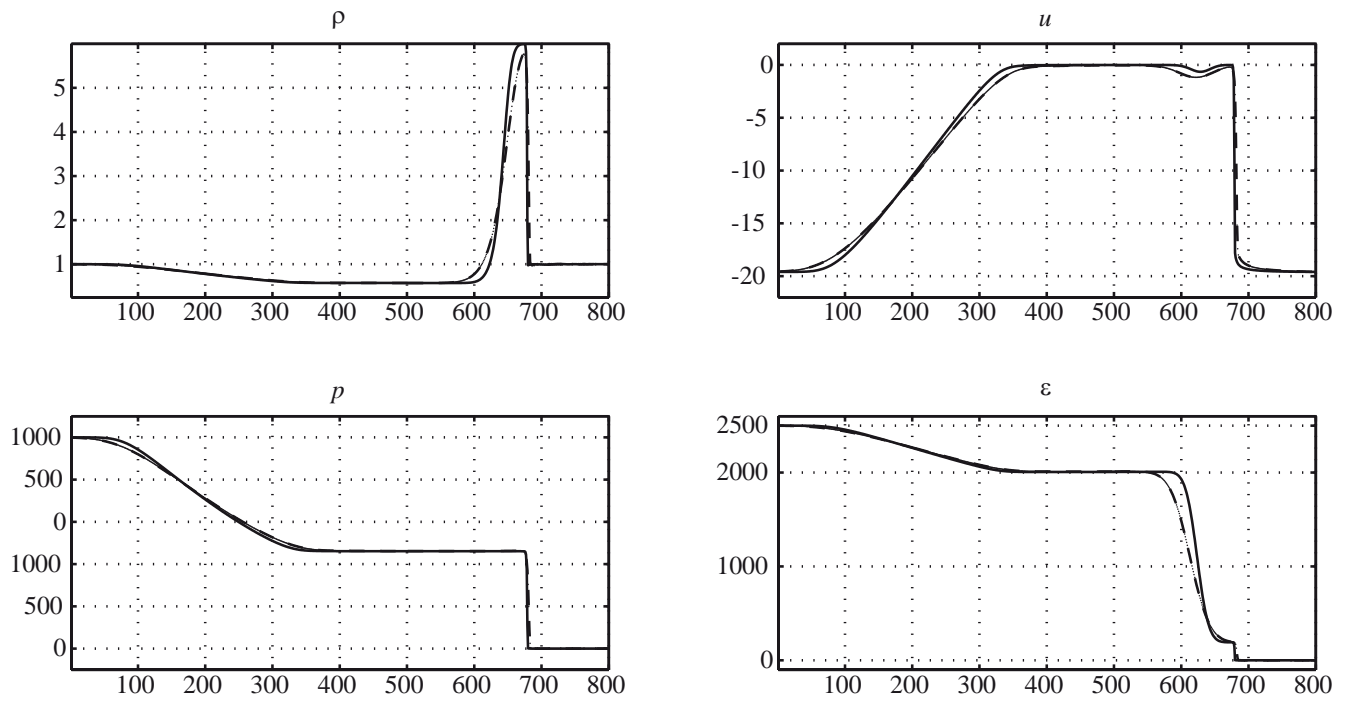


Рис. 4. Тест 1,  $\varepsilon$ . Решение при  $N = 600$  (пунктир) и  $N = 2400$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 1$

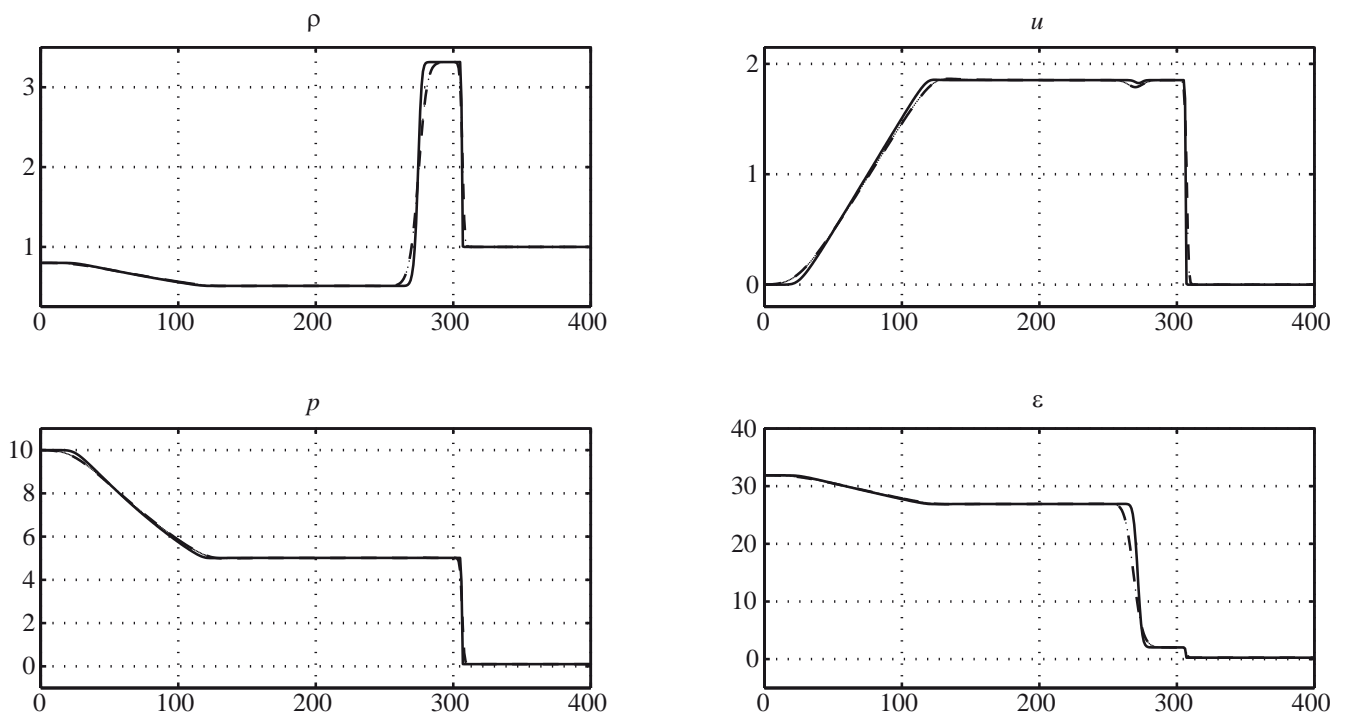


Рис. 5. Тест 2, б — двучленные уравнения состояния. Решение при  $N = 800$  (пунктир) и  $N = 2400$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 0,1$

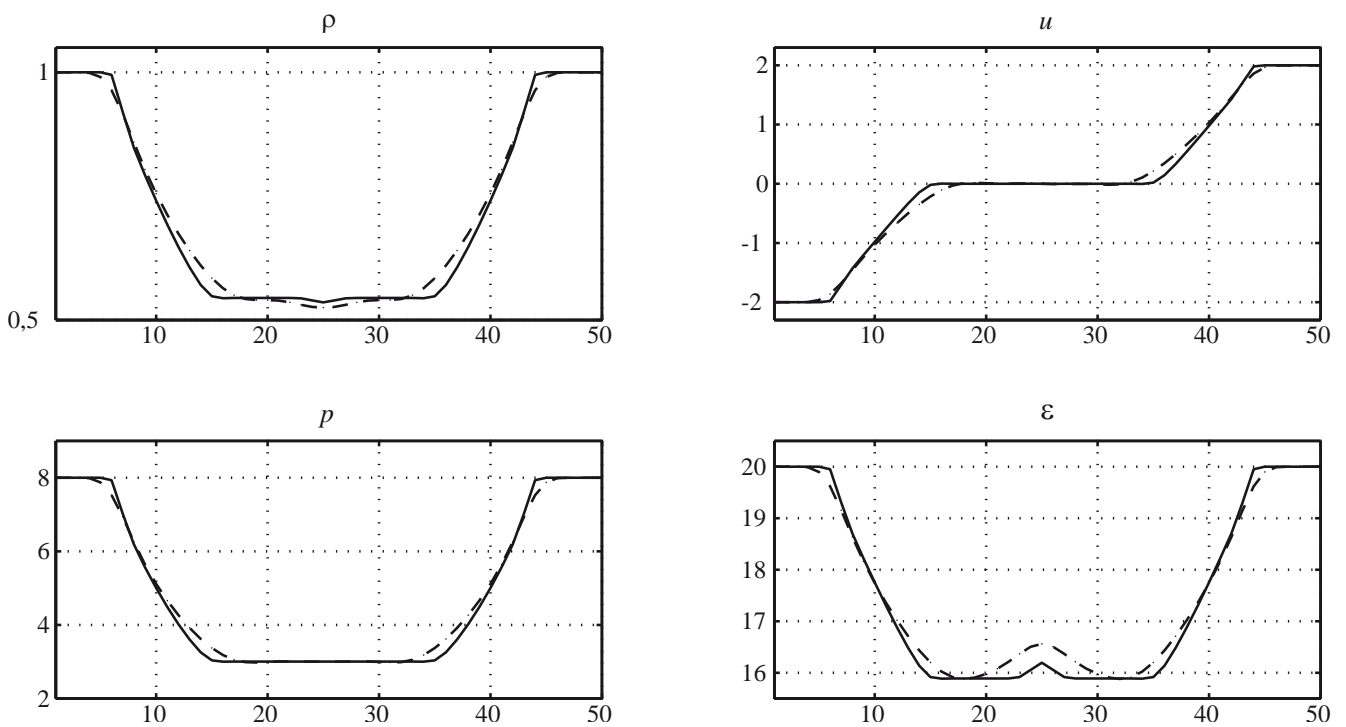


Рис. 6. Тест 2, в — двучленные уравнения состояния. Решение при  $N = 50$  (пунктир) и  $N = 300$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 0,07$



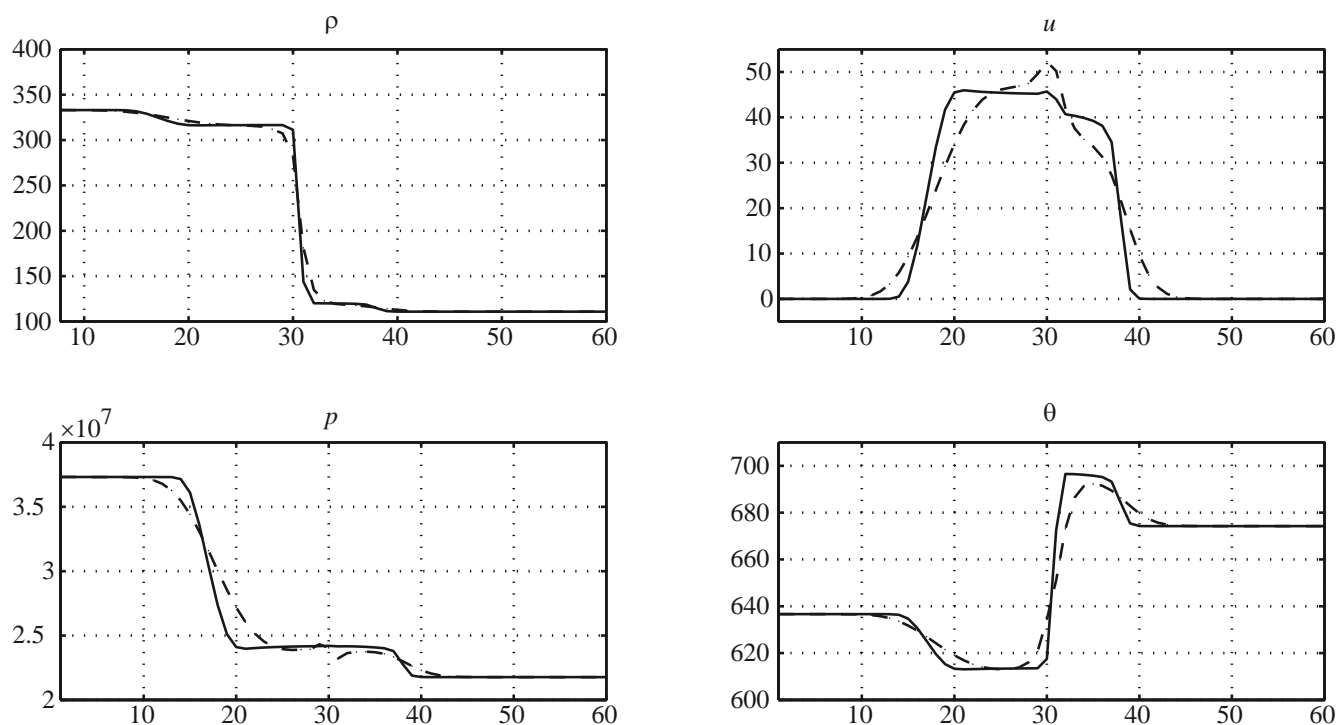


Рис. 7. Тест 3, б — уравнения состояния Ван-дер-Ваальса. Решение при  $N = 60$  (пунктир) и  $N = 600$  (сплошная линия) для  $t_{fin} = 0,0025$

отличия, меньшие из двух значений  $N$  взяты в 2,5 раза меньше, чем в [9]. Графики  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  и  $\theta$  в случае (а) опущены, а в более сложном случае (б) представлены на рис. 7.

Во всех тестах попытки увеличить  $\beta$  обычно ведут к потере устойчивости вычислений или точности решений (в том числе, появлению осцилляций).

В целом полученные результаты демонстрируют конкурентоспособность построенной дискретизации КГДД системы с применением специальных «энтропийных» дискретизаций  $\rho$ ,  $\varepsilon$ , хотя при экстремальных параметрах течений использование КГД системы все же предпочтительнее.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00703), и программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» (проект № 15-09-0266).

## Литература

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: РХД, 2009.
4. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее

гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 445 — 472.

5. Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667 — 682.

6. Злотник А.А., Гаврилин В.А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа // Вестник МЭИ. 2009. № 6. С. 116 — 126.

7. Злотник А.А. Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Докл. АН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605 — 609.

8. Злотник А.А. Пространственная дискретизация одномерной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение баланса энтропии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 7. С. 1304 — 1316.

9. Гаврилин В.А., Злотник А.А. О пространственной дискретизации одномерной квазигазодинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния и балансе энтропии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 2. С. 267 — 284.

10. Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Численное моделирование течений газа на основе квазигидродинамических уравнений // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2009. № 6. С. 29 — 33.

11. **Toro E.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Heidelberg: Springer, 1997.

12. **Noh W.F.** Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux // J. Comput. Phys. 1987. V. 72. P. 78—120.

13. **Елизарова Т.Г., Шильников Е.В.** Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений газа // Журнал вычисли-

тельной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 549 — 566.

14. **Tang H.-Z.** Gas-kinetic schemes for compressible flow of real gases // Comput. Math. Appl. 2001 V. 41. N 3. P. 723 — 734.

15. **Buffard T., Gallouet T., Herard J.-M.** A sequel to a rough Godunov scheme: application to real gases // Comput. Fluids. 2000. V. 29. N 7. P. 813 — 847.

*Статья поступила в редакцию 28.09.2015*